descomplica

Resumão

Matemática

Ciclo Trigonométrico

Exercícios

1. (IFAL – 2012) Considerando-se o arco trigonométrico abaixo, assinale a alternativa **falsa**.

$$\alpha = \frac{23\pi}{3}\ rad$$

a) α =1380º
b) α dá três voltas e para no 4º quadrante.
c) sen α = - sen 60º
d) cos α = cos 60º
e) α dá três voltas e para no 1º quadrante.

2. Seja $x \in [0; 2\pi]$. É valido dizer que o conjunto solução da inequação $cosx > \frac{\sqrt{2}}{2}$ é:

a) $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$
b) $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$
c) $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$
d) $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right)$
e) $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; \pi\right)$

3. Simplifique a expressão a seguir:

$$\frac{sen^8x - cos^8x}{(sen^4x + cos^4x)(senx - cosx)}$$

4. (UEMG – 2018) Sobre trigonometria, analise as assertivas e assinale a alternativa que aponta as corretas.

I. $\cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$
II. O valor de $(1 + \mathrm{cotg}^2 x)(1 - \cos^2 x)$, para $x \neq k\pi$, com k inteiro, é igual a 1.
III. A medida do arco trigonométrico da 1ª volta positiva, côngruo ao arco de medida – 40° é 40°.
IV. $\mathrm{tg}50° \cdot \mathrm{tg}310° < 0$.

a) Apenas I, II e IV.
b) Apenas I, II e III.
c) Apenas I e IV.
d) Apenas II e III.

5. (UEM – 2016) Sobre trigonometria, assinale o que for correto.

(01) Arcos congruentes diferente entre si por π radianos.

(02) Uma volta completa no círculo trigonométrico equivale a 360°.

(04) As funções seno e cosseno têm o mesmo período.

(08) $\frac{1}{\text{cotg}^2 x} + 1 = 1 - sen^2 x$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(16) No círculo trigonométrico, um ângulo negativo, em radianos, é medido no sentido anti-horário.

Soma: (   )

6. Encontre os ângulos no intervalo $[0; 3\pi]$ tais que $senx = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. O valor de $\cos 165° + \text{sen}\, 155° + \cos 145° - \text{sen}\, 25° + \cos 35° + \cos 15°$ é:

a) $\sqrt{2}$

b) -1

c) 0

d) 1

e) $\frac{1}{2}$

8. O valor da expressão é:

$$\frac{sen30^o + \tan 225^o}{\cos\frac{\pi}{2} - sen(-60^o)}$$

a) 1

b) $\frac{1}{2}$

c) $-\sqrt{3}$

d) $\sqrt{3}$

e) $-\frac{1}{2}$

Gabaritos

1. E

a) Verdadeira, pois $\alpha = \frac{23\pi}{3} = \frac{23 \cdot 180°}{3} = 1380°$.

b) Verdadeira, pois $\alpha = \frac{23\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + 3 \cdot 2\pi$.

c) Verdadeira, $sen\alpha = -sen60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

d) Verdadeira, pois $cos\alpha = cos60° = \frac{1}{2}$.

e) Falsa, o arco da três voltas completas e, enfim, para no quarto quadrante.

2. D

Temos que $cosx = \frac{1}{2}$ para $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{7\pi}{4}$. Para arcos menores que $\frac{\pi}{4}$ e maiores que $\frac{7\pi}{4}$, $cosx > \frac{1}{2}$, uma vez que a coordenada x desses arcos aumenta quanto mais perto do marco de $0\ rad$ e $2\pi\ rad$.

Logo, $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right)$.

3. $\mathbf{senx + cosx}$

$$\frac{\mathrm{sen}^8\mathrm{x} - \cos^8\mathrm{x}}{(\mathrm{sen}^4\mathrm{x} + \cos^4\mathrm{x})(\mathrm{senx} - \mathrm{cosx})} = \frac{(\mathrm{sen}^4\mathrm{x} + \cos^4\mathrm{x})(\mathrm{sen}^4\mathrm{x} - \cos^4\mathrm{x})}{(\mathrm{sen}^4\mathrm{x} + \cos^4\mathrm{x})(\mathrm{senx} - \mathrm{cosx})} = \frac{(\mathrm{sen}^4\mathrm{x} - \cos^4\mathrm{x})}{(\mathrm{senx} - \mathrm{cosx})} =$$

$$\frac{(\mathrm{sen}^2\mathrm{x} + \cos^2\mathrm{x})(\mathrm{sen}^2\mathrm{x} - \cos^2\mathrm{x})}{(\mathrm{senx} - \mathrm{cosx})} = \frac{1 \cdot (\mathrm{sen}^2\mathrm{x} - \cos^2\mathrm{x})}{(\mathrm{senx} - \mathrm{cosx})} = \frac{(\mathrm{senx} - \mathrm{cosx})(\mathrm{senx} + \mathrm{cosx})}{(\mathrm{senx} - \mathrm{cosx})} = \mathrm{senx} + \mathrm{cosx}$$

4. A

I. CORRETA. Calculando:

$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$

Se $a = \frac{x}{2}$:

$\cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$

$\cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$

II. CORRETA. Calculando:

$(1 + \mathrm{cotg}^2 x)(1 - \cos^2 x) = \left(1 + \frac{\cos^2 x}{\mathrm{sen}^2 x}\right) \cdot \mathrm{sen}^2 x = \mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

III. INCORRETA. A medida do arco trigonométrico da 1^{a} volta positiva, côngruo ao arco de medida $-40°$, é $320°$.

IV. CORRETA, pois:

$\mathrm{tg}50° > 0; \mathrm{tg}310° < 0 \rightarrow \mathrm{tg}50° \cdot \mathrm{tg}310° < 0$

5. 02 + 04 = 06

[01] Falsa. Arcos côngruos diferem entre si por 2π radianos.

[02] Verdadeira. Um ângulo de 1 volta mede $360°$.

[04] Verdadeira. O período das funções seno e cosseno simples é $\boldsymbol{2\pi}$.

[08] Falsa. Tomando $\boldsymbol{x} = \frac{\pi}{4}$, temos

$$\mathbf{2} = \frac{1}{\mathrm{cotg}^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} + 1 \neq 1 - \mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

[16] Falsa. Um ângulo negativo, por convenção, é medido no sentido horário.

6. Devemos procurar arcos que possuem coordenada $\boldsymbol{y}$ igual a do arco de $\frac{\pi}{4}$. Assim,

$$x = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}\right\}$$

7. C

$$(\cos 165° + \mathrm{sen}155° + \cos 145° - \mathrm{sen}25° + \cos 35° + \cos 15°) =$$
$$-\cos 15° + \mathrm{sen}25° - \cos 35° - \mathrm{sen}25° + \cos 35° + \cos 15° = 0$$

8. D

$$\frac{\mathrm{sen}30° + \mathrm{tg}225°}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \mathrm{sen}(-60°)} = \frac{\mathrm{sen}30° + \mathrm{tg}45°}{\cos 90° - \mathrm{sen}(300°)} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{0 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Função Exponencial

Exercícios

1. (Unicamp) Considere as funções $f(x) = 3^x$ e $g(x) = x^3$, definidas para todo número real x. O número de soluções da equação $f(g(x)) = g(f(x))$ é igual a

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.

2. (Enem) O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é uma medida usada para classificar os países pelo seu grau de desenvolvimento. Para seu cálculo, são levados em consideração a expectativa de vida ao nascer, tempo de escolaridade e renda per capita, entre outros. O menor valor deste índice é zero e o maior é um. Cinco países foram avaliados e obtiveram os seguintes índices de desenvolvimento humano:

o primeiro país recebeu um 1 valor x ;
o segundo $\sqrt{x}$, o terceiro $x^{\frac{1}{3}}$;
o quarto x^2 e o último x^3.

Nenhum desses países zerou ou atingiu o índice máximo. Qual desses países obteve o maior IDH?

a) O primeiro
b) O segundo
c) O terceiro
d) O quarto
e) O quinto

3. (Uece) Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$, então, o número de elementos do conjunto $\{x \in \mathbb{R}$, tais que $f(x) = 1\}$ é igual a

a) 0
b) 2
c) 1
d) 3

4. (Ufrgs) Considere a função real de variável real $f(x) = 2^{x-1}$. Com relação à $f(x)$, é correto afirmar que

a) Se $x < 1$, então $f(x) < 0$.

b) Se $x \geq 1$, então $f(x) \leq 1$.

c) A função $f(x)$ é decrescente para $x < 0$ e crescente para $x \geq 0$.

d) Os valores das imagens de $f(x): A \rightarrow \mathbb{R}$, em que $A = \{x \in \mathbb{N}, x \geq 0\}$, formam uma progressão aritmética

e) Os valores das imagens de $f(x): A \rightarrow \mathbb{R}$, em que $A = \{x \in \mathbb{N}, x \geq 0\}$, formam uma progressão geométrica

5. Em um experimento, o número de bactérias presentes nas culturas A e B, no instante t, em horas, é dado, respectivamente, por: $\mathrm{A(t)} = 10.2^{\mathrm{t}-1} + 238$ e $\mathrm{B(t)} = 2^{\mathrm{t}+2} + 750$. De acordo com essas informações, o tempo decorrido, desde o início desses experimento, necessário para que o número de bactérias presentes na cultura A seja igual ao da cultura B é

a) 5 horas.

b) 6 horas.

c) 7 horas.

d) 9 horas.

e) 12 horas.

6. (Enem PPL) Em um laboratório, cientistas observaram o crescimento de uma população de bactérias submetida a uma dieta magra em fósforo, com generosas porções de arsênico. Descobriu-se que o número de bactérias dessa população, após t horas de observação, poderia ser modelado pela função exponencial $\mathrm{N(t)} = \mathrm{N_0 e^{kt}}$, em que $\mathrm{N_0}$ é o número de bactérias no instante do início da observação $(\mathrm{t} = 0)$ e representa uma constante real maior que 1, e k é uma constante real positiva. Sabe-se que, após uma hora de observação, o número de bactérias foi triplicado. Cinco horas após o início da observação, o número de bactérias, em relação ao número inicial dessa cultura, foi

a) $3N_0$

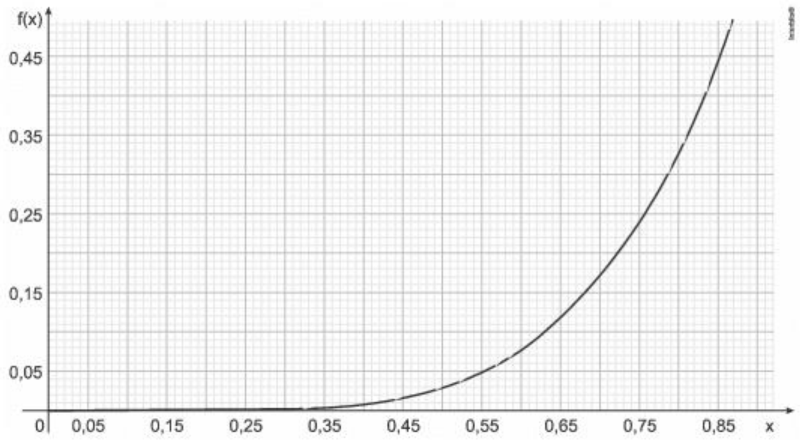
b) $15N_0$

c) $243N_0$

d) $360N_0$

e) $729N_0$

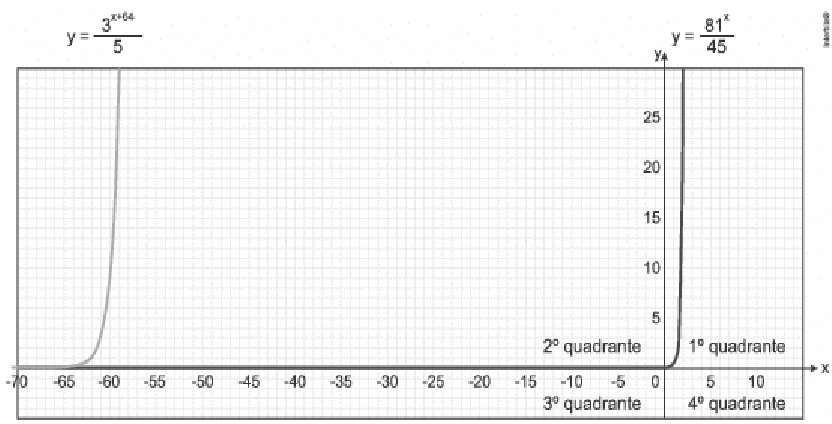
7. (Fac. Albert Eistein) Considere o gráfico $f(x) = x^5$ para os cálculos desta questão.



A cafeína é eliminada da corrente sanguínea de um adulto a uma taxa de, aproximadamente 15% por hora. Cinco horas após o consumo de um café expresso, que contém 200mg de cafeína, um adulto ainda terá em sua corrente sanguínea a quantidade aproximada de cafeína de

a) 100 mg
b) 45 mg
c) 88 mg
d) 95 mg
e) 68 mg

8. (Unesp) Observe, no plano cartesiano de eixos ortogonais, o gráfico de duas funções exponenciais de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.



A intersecção desses gráficos ocorrerá em

a) infinitos pontos, localizados no 2° quadrante.
b) um único ponto, localizado no 2° quadrante.
c) um único ponto, localizado no 3° quadrante.
d) um único ponto, localizado no 1° quadrante.
e) um único ponto, localizado no 4° quadrante.

Gabarito

1. **C**
   $\boldsymbol{f(g(x)) = f(x^3) = (3)^{x^3}}$
   $\boldsymbol{g(f(x)) = g(3^x) = (3^x)^3}$
   $\boldsymbol{(3^x)^3 = (3)^{x^3} \Rightarrow x^3 = 3x \Rightarrow x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x \cdot (x^2 - 3) = 0}$
   $$\begin{cases} x' = 0 \\ x'' = \sqrt{3} \\ x''' = -\sqrt{3} \end{cases}$$

2. **C**
   Tem-se que, dado 0 < a < 1, temos $\boldsymbol{a^{\alpha}} < \boldsymbol{a^{\beta}}$ se, e somente se, $\boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{\beta}$, quaisquer que sejam $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ reais. Logo, sendo 0 < x < 1, vem $x^3 < x^2 < x < \boldsymbol{x^{\frac{1}{2}}} < \boldsymbol{x^{\frac{1}{3}}}$.
   Em consequência, podemos afirmar que o terceiro país obteve o maior IDH.

3. **C**
   Tem-se que
   $\boldsymbol{\dfrac{2^x + 2^{-x}}{2} = 1}$
   $\boldsymbol{2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1 = 0}$
   $\boldsymbol{(2^x - 1)^2 = 0}$
   $x = 0$

   Portanto, vem $\{x \in \mathbb{R}$, tais que $f(x) = 1\}$=\{0\} e a resposta é 1.

4. **E**
   a) INCORRETA. Se $x < 1$**, então** $f(x) < 1$
   b) INCORRETA. Se $x \geq 1$**, então** $f(x) \geq 1$
   c) INCORRETA. A função é sempre crescente.
   d) INCORRETA. Os valores formam uma progressão geométrica.
   e) CORRETA. Os valores formam uma progressão geométrica $(2^0, 2^1, 2^2$ **...)**

5. **D**
   Para que o número de bactérias presentes na cultura A seja igual ao da cultura B, devemos ter
   $\boldsymbol{10.2^{t-1} + 238 = 2^{t+2} + 750}$
   $\boldsymbol{\Leftrightarrow 10 \cdot 2^{t-1} - 2^{t+2} = 750 - 238}$
   $\boldsymbol{\Leftrightarrow 2^{t-1} \cdot (10 - 2^3) = 512}$
   $\boldsymbol{\Leftrightarrow 2^{t-1} = 2^8}$
   $\boldsymbol{\Leftrightarrow t = 9}$
   Em consequência, a resposta é 9 horas.

6. **C**
   Sabendo que $N(1) = 3N_0$, temos
   $3N_0 = N_0e^{k*1}$ se, e somente se, $e^k = 3$
   Em consequência, vem
   $N(5) = N_0e^{k*5} = N_0(e^k)^5 = N_03^5 = 243N_0$

7. C

Considerando que C(t) seja a quantidade de cafeína após t horas, temos:

$\boldsymbol{C(t) = 200 \cdot (1 - 0,15)^t}$

Considerando t = 5, obtemos:

$\boldsymbol{C(5) = 200 \cdot (0,85)^5}$

De acordo com o gráfico, podemos considerar que:

$\boldsymbol{0,85^5 = 0,44}$

Portanto:

$C(5) = 200 \cdot 0{,}44$

$C(5) = 88mg$

8. D

As abscissas dos pontos de insterseção dos gráficos correspondem às raízes da equação

$\frac{3^{x+64}}{5} = \frac{81^x}{45} \Leftrightarrow 3^{x+64} = 3^{4x-2} \Leftrightarrow x = 22.$

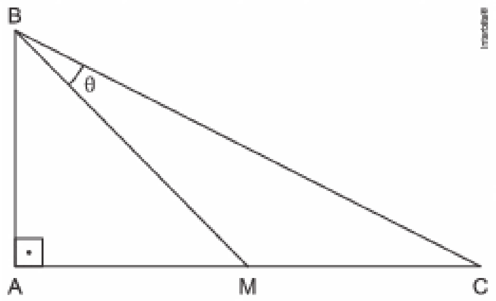
Desse modo, como a equação possui uma única raíz, podemos concluir que há um único ponto de interseção. Tal ponto está localizado no 1º quadrante, uma vez que:

$x = 22 > 0$ e $y = \frac{81^{22}}{45} > 0$

Trigonometria algébrica

Exercícios

1. (Unicamp) A figura abaixo exibe o triângulo retângulo ABC, em que AB = AM = MC. Então, tgθ é igual a



a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{5}$

2. (Ufms) Às 12 horas, os ponteiros dos minutos e das horas se superpõem, e às 13 hots eles fazem um ângulo de 30°. Seguindo esse raciocínio, o valor da soma dos ângulos formados às 15h 30min e às 18h 40min é:

a) 150°

b) 115°

c) 75°

d) 40°

e) 35°

3. (Unesp) Os pontos P e Q sobre a superfície da Terra possuem as seguintes coordenadas geográficas:

	Latitude	Longitude
P	30°N	45°L
Q	30°N	15°L

Considerando a Terra uma esfera de raio 6.300km, a medida do menor arco $\overline{PQ}$ sobre a linha do paralelo 30°N é igual a

a) $1.150\pi\sqrt{3}\ km$

b) $1.250\pi\sqrt{3}\ km$

c) $1.050\pi\sqrt{3}\ km$

d) $1.320\pi\sqrt{3}\ km$

e) $1.350\pi\sqrt{3}\ km$

4. Sejam k e θ números reais tais que $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ são soluções da equação quadrática $2x^2 + x + k = 0$. Então, k é um número.

a) Irracional.

b) Racional não inteiro.

c) Inteiro positivo.

d) Inteiro negativo.

5. (Ufms) A expressão trigonométrica $\frac{sen^3 x - cos^3 x}{senx - cos\,x}$ é equivalente a:

a) $sen^2 x - cos^2 x$

b) $senx + cosx$

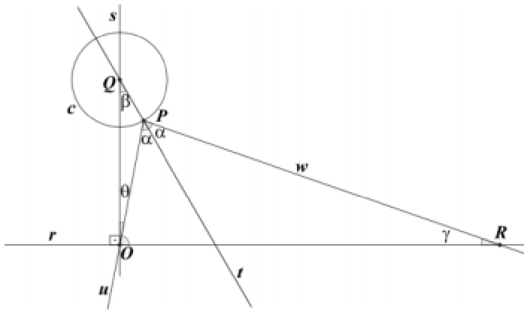
c) $1 - senx \cdot cos\,x$

d) $\frac{senx + cos\,x}{senx - cos\,x}$

e) $\frac{sen(2x)}{2} + 1$

6. (Fuvest) Conforme se vê na figura, em um plano, encontram se:

- duas retas perpendiculares r e S e o ponto O de intersecção dessas duas retas;
- um ponto $Q \in s$ tal que a medida de $\overline{OQ}$ é 5;
- uma circunferência C, centrada em Q, de raio 1;
- um ponto $P \in c$ tal que o segmento $\overline{OP}$ intersecta C apenas em P.



Denotam-se $\theta = QOP$ e $\beta = OQP$.

a) Calcule $sen\theta$, no caso em que θ assume o máximo valor possível na descrição acima.

b) Calcule $sen\theta$, no caso em que $\beta = 60°$.

7. (Unicamp) Considere que os ângulos internos de um triângulo formam uma progressão aritmética. Dado que a, b, c são as medidas dos lados do triângulo, sendo a < b < c é correto afirmar que

a) $b^2 + ac = a^2 + c^2$

b) $a^2 + bc = b^2 + c^2$

c) $a^2 - bc = b^2 + c^2$

d) $b^2 - ac = a^2 + c^2$

8. (Uemg) Sobre trigonometria, analise as assertivas e assinale a alternativa que aponta as corretas.

I. $\cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$;

II. o valor de $(1 + \text{cotg}^2 x)(1 - \cos^2 x)$, para $x \neq k\pi$ para k inteiro, é igual a 1;

III. a medida do arco trigonométrico da 1ª volta positiva, côngruo ao arco de medida -40°, é 40°;

IV. tg50°.tg310° < 0.

a) Apenas I, II e IV

b) Apenas I, II e III.

c) Apenas I e IV.

d) Apenas II e III.

Gabarito

1. B

Como AB = AM, podemos concluir que o triângulo ABM é retângulo isósceles, ou seja, ABM ≡ BMA = 45°. Ademais, AB = AM = MC implica em AC = 2AB. Portanto, do triângulo ABC temos

$$\tan(45+\theta) = \frac{AC}{AB}$$
$$\frac{\tan 45^0 + \tan\theta}{1-\tan 45^0 \cdot \tan\theta} = \frac{2AB}{AB}$$
$$\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} = 2$$
$$\tan\theta = \frac{1}{3}$$

2. B

O ângulo percorrido pelo ponteiro das horas em 30 minutos corresponde a $\frac{30}{2} = 15^0$. Logo, como o ângulo entre as posições 3 e 6 corresponde a $3 \cdot 30^0 = 90^0$, podemos concluir que o ângulo às 15h 30min é 90° - 15° = 75°. A resposta é 75° + 40° = 115°.

3. C

Seja r o raio da circunferência de centro C correspondente à latidude 30°N. Logo, temos

$$\cos 30^0 = \frac{r}{6300} \Leftrightarrow r = 3150\sqrt{3}km$$

Portanto, sendo $C\hat{P}Q = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} rad$, vem

$$PQ = \frac{\pi}{3} \cdot 3150\sqrt{3} = 1050\pi\sqrt{3}km$$

4. B

Se sen$\boldsymbol{\theta}$ e cos$\boldsymbol{\theta}$ são soluções, então, pelas relações de Girard, temos

$$sen\theta + \cos\theta = -\frac{1}{2} \quad e \quad sen\theta \cdot \cos\theta = \frac{k}{2}$$

Logo, vem

$$(sen\theta + \cos\theta)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$
$$sen^2\theta + 2sen\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$$
$$1 + 2 \cdot \frac{k}{2} = \frac{1}{4}$$
$$k = -\frac{3}{4}$$

Por conseguinte, k é um racional não inteiro.

5. E

Sabendo que $\boldsymbol{sen^2x + cos^2 x = 1}$, $sen2x = 2senx\,cos\,x$ e supondo $\boldsymbol{senx \neq cos\,x}$, temos

$$\frac{\boldsymbol{sen^3x - cos^3 x}}{\boldsymbol{senx - cos\,x}}$$
$$\frac{(\boldsymbol{senx} - \mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{sen^2x + sen \times} \mathbf{cos}\,\boldsymbol{x} + \mathbf{cos}^2\,\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{senx} - \mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}}$$
$$\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{2}\boldsymbol{senx\,cos\,x}$$

$$1+\frac{sen2x}{2}$$

6.

a) o ângulo θ é máximo quando OP é tangente à circunferência c. Logo, temos θ = 90° e, portanto, do triângulo retângulo OPQ, vem

$$\boldsymbol{Sen\theta = \frac{OP}{OQ} \Leftrightarrow sen\theta = \frac{1}{5}}$$

b) Tomando o triângulo OPQ, pela lei dos cossenos, encontramos

$$\overline{OP^2} = \overline{OQ^2} + \overline{PQ^2} - 2\cdot\overrightarrow{OQ}\cdot\overline{pQ}\cdot\cos\beta$$
$$\overline{OP^2} = 5^2 - 1^2 - 2\cdot 5\cdot 1\cdot\frac{1}{2}$$
$$\overline{OP^2} = 21$$
$$\overline{OP} = \sqrt{21}$$

Em consequência, pela lei dos Senos, obtemos

$$\frac{\overline{PQ}}{Sen\theta} = \frac{\overline{OP}}{sen\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{sen\theta} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow sen\theta = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

c) Do triângulo OPQ, pela lei dos senos, vem

$$\frac{\overline{PQ}}{sen\theta} = \frac{\overline{OQ}}{sen(180-\alpha)} \Leftrightarrow \frac{1}{sen\theta} = \frac{5}{sen135}$$

7. A

Sejam A, B e C, respectivamente, os ângulos internos do triângulo, opostos aos lados de medidas a, b e c. Logo, sabendo que aos maiores lados de um triângulo opõem-se os maiores ângulos, temos A < B < C. Ademais, como A, B e C estão em progressão artimética, podemos escrever (A, B, C) = (B − r, B, B + r), Em que r > 0 é a razão da progressão aritmética.

Desde que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°, vem

$$B - r + B + B + r = 180°$$
$$B = 60$$

Finalmente, pela Lei dos Cossenos, temos

$$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos B}$$
$$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot\frac{1}{2}}$$
$$\boldsymbol{b^2 + ac = a^2 + c^2}$$

8. A

I. Correta. Calculando:

$$\cos(2a) = 2\cdot\cos^2 a - 1$$

Se $a = \frac{x}{2}$

$$\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = 2\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$
$$\cos(x) = a\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

II. Correta. Calculando:

$$(1+\cot g^2 x)\cdot(1-\cos^2 x) = \left(1+\frac{\cos^2 x}{5en^2 x}\right)\cdot sen^2 x = sen^2 x + \cos^2 x = 1$$

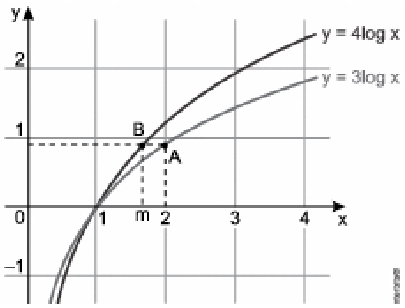
III. Incorreta. A medida do arco trigonométrico da 1ª volta positiva, côngruo ao arco da medida -40°, é 320°.

IV. Correta. Pois:
$\tan 50^0 > 0$
$\tan 310^0 < 0$
$\tan 50^0 \cdot \tan 310^0 < 0$

Logaritmos

Exercícios

1. (Famerp) A figura indica os gráficos das funções f e g, definidas de R_+^* em R, cujas leis são, respectivamente, $f(x) = 4\ log\ log\ x$ e $g(x) = 3\ log\ log\ x$



O valor de m, indicado na figura, é igual a

a) $log\ log\ 1\ 2$
b) $2^{0,75}$
c) $log\ log\ 7$
d) $2^{0,25}$
e) $2^{1,25}$

2. (Ufrgs) Se $log2 = x$ e $log3 = y$, então $log288$ é

a) $2x + 5y$
b) $5x + 2y$
c) $10xy$
d) $X^2 + y^2$
e) $X^2 - y^2$

3. (Udesc) Considerando $ln10 = 2{,}0$, então o valor da expressão $\frac{lna^3 - loglog\ a + 2lna}{loglog\ a}$ é igual a:

a) 4
b) 10,5
c) 4a
d) 2,3a^2
e) 1,3

4. (Fmp) Considere a função logarítmica $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ difinida por $f(x) = \log_7(x)$. Quanto vale a razão $\frac{f(4)}{f(16)}$?

a) $log_7\left(\frac{1}{4}\right)$

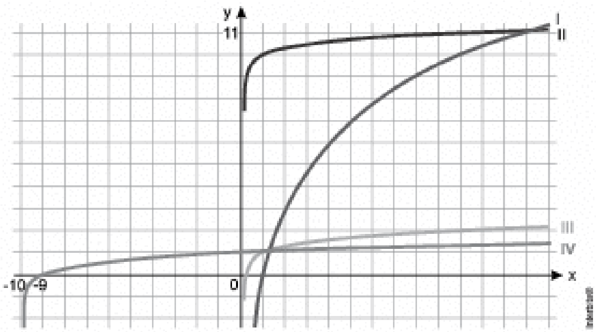
b) $\sqrt{7}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\sqrt[4]{7}$

e) $\frac{1}{2}$

5. As funções logarítmicas f, g, h, p são dadas por $f(x) = 10 + log\ log\ x$, $g(x) = 10\ log\ log\ x$, $h(x) = log\ log\ (10x)$ e $p(x) = log\ log\ (x + 10)$.



Os gráficos I, II, III e IV correspondem, respectivamente, às funções

a) h, f, g, p

b) g, h, f, p

c) g, f, h, p, g

d) g, f, p, h

e) p, f, h, g

6. (Ufpr) Faça o que se pede.

a) Calcule $\left(\frac{1}{8}\right)$. Forneça sua resposta com duas casas decimais.

b) Resolva a inequação $(2x + 3) \geq 1$. Expresse sua resposta na forma de intervalo.

7. (Ufrgs) O valor de

$$E = log\left(\frac{1}{2}\right) + log\left(\frac{2}{3}\right) + \cdots + log\left(\frac{999}{1000}\right)$$

a) -3

b) -2

c) -1

d) 0

e) 1

8. (Unifesp) Em um jogo disputado em várias rodadas consecutivas, um jogador ganhou metade do dinheiro que tinha a cada rodada ímpar e perdeu metade do dinheiro que tinha a cada rodada par.

x	Valor aproximado de 10^x
1,5	32
1,55	35
1,6	40
1,65	45
1,7	50
1,75	56
1,8	63
1,85	71

a) Sabendo que o jogador saiu do jogo ao término da 4ª rodada com R$202,5, calcule com quanto dinheiro ele entrou na 1ª rodada do jogo.

b) Suponha que o jogador tenha entrado na 1ª rodada do jogo com R$1.000,00, terminando, portanto, essa rodada com R$1.500,00, e que tenha saido do jogo ao término da 20ª rodada. Utilizando $log\, log\, 2 \cong 0{,}301\ e\ \ log\, log\, 3 \cong 0{,}477$ e os dados da tabela, calcule com quanto dinheiro, aproximadamente, ele saiu do jogo.

Gabarito

1. B

$3\log 2 = 4\log m \Rightarrow \frac{3}{4}\log 2 = \log m \Rightarrow \log 2^{3/4} = \log m \Rightarrow m = 2^{3/4} = 2^{0,75}$

2. B

Tem-se que

$log\ 288 = log\ 2^5 \cdot 3^2 = log\ 2^5 + log\ 3^2 = 5 \cdot log\ 2 + 2 \cdot log\ 3 = 5x + 2y$

3. B

$$\frac{\ln a^3 - \log a + 2\ln a}{\log a} = \frac{3 \cdot \ln a - \log a + 2 \cdot \ln a}{\log a} = \frac{5 \cdot \ln a - \log a}{\log a} =$$

$$\frac{5\ln a}{\log a} - 1 = \frac{5\ln a}{\frac{\ln a}{\ln 10}} - 1 = 5\ln 10 - 1 = 5 \cdot 2{,}3 - 1 = 10{,}5$$

4. E

Calculando:

$f(4) = log_7(4)$

$f(16) = log_7(16) = log_7(4^2) = 2 \cdot log_7(4)$

$$\frac{f(4)}{f(16)} = \frac{log_7(4)}{2 \cdot log_7(4)} = \frac{1}{2}$$

5. C

O gráfico I se refere à g(x) = 10logx, pois quando x é igual a 10, y será igual a 10.

O gráfico II se refere à f(x) = 10 + logx, pois quando x é igual a 1, y será igual a 10.

O gráfico III se refere à h(x) = log(10x), pois quando x é igual a 1, y será igual a 1.

O gráfico IV se refere à p(x) = log(x + 10), pois quando x é igual a zero, y será igual a 1.

6.

a) Calculando:

$$\log_{16} {}^{1}/_{8} = \log_{16} 1 - \log_{16} 8 = -\log_{16} 8 = -\frac{1}{4}\log_2 2^3 = -\frac{3}{4}\log_2 2 = -\frac{3}{4} = -0{,}75$$

b) Calculando:

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x+3) \geq 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(2x+3) \geq \log_{\frac{1}{2}}({}^{1}/_{2}) \Rightarrow 2x + 31 < \frac{1}{2} \Rightarrow 4x + 6 \leq 1 \Rightarrow x_1 < -\frac{5}{4}$$

Condição de existência:

$$2x + 3 > 0 \Rightarrow 2x > -3 \Rightarrow x > -\frac{3}{2}$$

Logo,

$$-\frac{3}{2} < x \leq -\frac{5}{4}$$

7. A

Calculando:

$log\left(\frac{1}{2}\right) + log\left(\frac{2}{3}\right) + \cdots + log\left(\frac{499}{1000}\right)$

$log1 - log2 + log2 - log3 + log3 - log4 + \cdots + log998 - log999 + log999 - log1000$

$log1 - log1000 = 0 - 3 = -3$

8.

a) Seja V_0 o valor com que ele entrou na primeira rodada. Logo, tem-se que

$202{,}5 = \frac{3}{2}v_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow v_0 = R\$360{,}00$

b) Se ele saiu na 20ª rodada, então disputou 10 rodadas ímpares e 10 rodadas pares. Desse modo, o valor, V_{20}, com que ele saiu do jogo é dado por

$v_{20} = 1000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

$\log v_{20} = \log \frac{10^3 . 3^{10}}{2^{20}}$

$\log v_{20} = 3 \cdot \log 10 + 10 \cdot \log 3 - 20 \cdot \log 2$

$\log v_{2o} = 3 + 4{,}77 - 6{,}02$

$v_{20} = 10^{1,75}$

$v_{20} = R\$56{,}00$